Université de Rennes Semestre printemps 2024-2025

M1 Maths fondamentales Analyse avancée

Contrôle continu n° 2

Rappel de notations : On rappelle les conventions suivantes

— les coefficients de Fourier $T\mathbf{Z}$-périodiques d'une fonction L^1_{loc} $T\mathbf{Z}$-périodique sont définis par

$$c_j^T(u) \,=\, \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi\, j}{T}\, x}\, u(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad j\in\mathbf{Z}$$

— la transformée de Fourier est donnée pour les fonctions intégrables sur $\mathbf{R}^d$ par

$$\mathcal{F}(u)(\xi) \,=\, \int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\, u(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \xi\in\mathbf{R}^d\,.$$

Exercise 1. Déterminer les coefficients de Fourier $\mathbf{Z}$-périodiques des fonctions suivantes.

1. $\sin(2\pi\,\cdot)$
2. $\cos(6\pi\,\cdot)$
3. $2+\sin(4\pi\,\cdot)+\cos(8\pi\,\cdot)$
4. $\sin(2\pi\,\cdot)^2+\cos(4\pi\,\cdot)^3$
5. $\cos(2\pi\,\cdot)\,\sin(6\pi\,\cdot)$
6. $\cos(2\pi\,\cdot)^2\,\sin(2\pi\,\cdot)^3$

Exercise 2.

1. Montrer qu'il existe $c\in\mathbf{R}^*$ tel que pour tout $f\in\mathcal{C}^1_c(\mathbf{R})$,

$$\int_{\mathbf{R}} x\, f(x)\, f'(x)\,\mathrm{d}x \,=\, c\|f\|^2_{L^2}\,.$$

2. En déduire qu'il existe $c_0>0$ tel que pour tout $f\in\mathcal{C}^1_c(\mathbf{R})$

$$c_0\|f\|^4_{L^2} \,\le\, \left(\int_{\mathbf{R}} x^2\, f(x)^2\,\mathrm{d}x\right)\times\left(\int_{\mathbf{R}} \xi^2\,|\mathcal{F}(f)(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi\right).$$

Exercise 3. On se donne $\omega:\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$ mesurable et l'on définit

$$X := \left\{\; u\in W^{1,1}_{loc}(\mathbf{R})\;;\; \|u\|_X<+\infty\;\right\}$$

où $\|\cdot\|_X$ est défini par

$$\|u\|^2_X := \int_{\mathbf{R}}\omega(x)(u(x))^2\mathrm{d}x \,+\, \int_{\mathbf{R}}(u'(x))^2\,\mathrm{d}x\,.$$

On suppose que $\liminf_{|x|\to\infty}\omega>0$, c'est-à-dire qu'il existe $\omega_0>0$ et $R>0$ tel que pour tout $|x|\ge R$, $\omega(x)\ge\omega_0$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_X$ définit une norme sur X.
2. Montrer que si $\chi\in\mathcal{C}^1_c(\mathbf{R})$ est constant sur $[-R,R]$, alors il existe C_χ tel que, pour tout $u\in X$, l'on ait $\chi u\in W^{1,1}_{loc}(\mathbf{R})$ avec

$$\|(\chi u)'\|_{L^2(\mathbf{R})} \,\le\, C_\chi\,\|u\|_X\,.$$

3. Montrer que l'application $j_1 : X \to H^1(\mathbf{R})$, $u \mapsto u$ est bien définie et continue.
4. Montrer que $(X, \|\cdot\|_X)$ est complet.
5. Montrer que si $\omega \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$, alors $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbf{R})$ est dense dans X.
6. Montrer que si $\omega \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$, pour tout $f \in H^{-1}(\mathbf{R})$, il existe un unique $u \in X$ tel que $\omega\, u - u'' = f$.
7. Donner explicitement $u \in X$ tel que $\omega u - u'' = \delta_0$ quand $\omega = \mathbf{1}_{\mathbf{R}\setminus[-1,1]}$.
8. Montrer que si $\lim_{|x|\to\infty} \omega = +\infty$, alors l'injection $j_2 : X \to L^2(\mathbf{R})$, $u \mapsto u$ est compacte.